Ağaəli Əli ƏHMƏDOV
Sumqayıt Dövlət Universitetinin magistrantı
E- mail: ageli812@gmail.com

KLEYN-FOK-QORDON TƏNLİYİNİN HÜLTEN POTENSİALLI SAHƏ ÜÇÜN ADI RELYATİVİSTİK KVANT MEXANİKASINDA ANALİTİK HƏLLİ

Xülasə

Bu məqalədə Kleyn-Fok-Qordon tənliyinin Hülten potensialı sahəsində analitik həlli adi kvant mexanikası çərçivəsində araşdırılmışdır. Relyativistik skalyar hissəciklərin dinamikasını təsvir edən Kleyn-Fok-Qordon tənliyi mərkəzi tipli qısa məsafəli potensiallarla qarşılıqlı təsir hallarında xüsusi maraq doğurur. Hülten potensialı isə eksponensial azalan formaya malik olub, qısa məsafəli Kulon potensialına yaxınlaşması və böyük məsafədə sürətlə sönməsi səbəbindən atom, molekul və nüvə sistemlərinin modelləşdirilməsində geniş tətbiq olunur. İşdə radial Kleyn-Fok-Qordon tənliyi sferik koordinatlarda ayrılaraq Hülten potensialı üçün diferensial tənlik hiperqometrik tipli tənliyə gətirilmişdir. Uyğun sərhəd şərtləri tətbiq edilərək enerji spektri üçün kvantlaşma şərti əldə edilmiş və bağlı hallar üçün enerji səviyyələrinin analitik ifadəsi çıxarılmışdır. Dalğa funksiyalarının normallaşdırılmış forması xüsusi funksiyalar vasitəsilə ifadə olunmuşdur. Alınmış nəticələrin təhlili göstərir ki, Hülten potensialı sahəsində Kleyn-Fok-Qordon tənliyinin analitik həlli sistemin enerji spektrində və dalğa funksiyalarının strukturunda relyativistik təsirlərin aydın şəkildə təzahür etməsinə gətirib çıxarır. Enerji spektri yalnız potensialın parametrlərindən və kvant ədədlərindən deyil,həm də işıq sürəti c vasitəsilə daxil olan relyativistik amillərdən asılı olur. Dalğa funksiyalarının müqayisəsi göstərir ki, Kleyn-Fok-Qordon tənliyi ilə əldə olunan radial həllər Şredinger tənliyinin verdiyi nəticələrdən müəyyən dərəcədə fərqlənir. Hissəciyin mərkəzdən müəyyən məsafədə olma ehtimalını xarakterizə edən radial dalğa funksiyasının forması və maksimumunun yerləşdiyi nöqtə qeyri-relyativistik hala nisbətən bir qədər dəyişə bilər. Bu dəyişikliklər xüsusilə potensialın dərin olduğu və qarşılıqlı təsirin daha güclü hiss edildiyi sahələrdə daha aydın müşahidə olunur. Beləliklə, Hülten potensialı sahəsində Kleyn-Fok-Qordon tənliyinin analitik həlli həm relyativistik təsirlərin mahiyyətini aydınlaşdırır, həm də qeyri-relyativistik kvant mexanikasının nəticələri ilə nəzəri ardıcıllıq və limit keçidinin düzgünlüyü baxımından uyğunluq nümayiş etdirir. Bu isə modelin molekulyar sistemlərdə qısa məsafəli qarşılıqlı təsirlərin daha fundamental və dəqiq təsviri üçün əlverişli nəzəri çərçivə olduğunu göstərir.

Açar sözləri: Kleyn-Fok-Qordon tənliyi, Hülten potensialı, analitik həllər, enerji spektri, relyativistik kvant mexanikası.

UOT: 530.145: 530.12
DOI: https://doi.org/10.54414/JLIZ6803

Giriş

Relyativistik kvant mexanikası elementar hissəciklərin və yüksək enerjili sistemlərin təsvirində fundamental nəzəri baza təşkil edir. Klassik qeyri-relyativistik yanaşmaların məhdud olduğu hallarda relyativistik dalğa tənlikləri fundamental rol oynayır. Bu sahədə Kleyn–Fok–Qordon tənliyi spini 0 olan skalyar hissəciklərin hərəkətini təsvir edən əsas dalğa tənliklərindən biridir. Şredinger tənliyinin çatışmazlıqları da var idi. Şredinger tənliyi xüsusi nisbilik nəzəriyyəsinin tələblərini ödəmir. O, lorens çevrilmələrinə nəzərən invariant deyildir. Təniyə zamana görə birinci tərtibdən, koordinatlara görə ikinci tərtibdən törəmələr daxil olur. Deməli, Şredinger nəzəriyyəsi $v \ll c$ halında fiziki hadisələrin təsviri üçün tətbiq oluna bilir. Qeyri-relyativistik kvant mexanikasında dinamik sistemi hərtərəfli xarakterizə edən tənlik qeyri-stasionar hal üçün Şredinger tənliyidir və bu tənlik aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t} = \hat{H}(r,t)\psi(r,t)$$

$\hat{H}$- sistemin Hamilton operatorudur, $\psi(r,t)$- sistemin dalğa funksiyasıdır. Qeyri-relyativistik kvant mexanikası, cisimlərin sürətləri işıq sürətinə nisbətən çox kiçik olduqda ($v \ll c$) tətbiq olunur. Qeyri-relyativistik kvant mexanikasında enerji diskretləşir, yəni zərrəcik yalnız müəyyən enerji səviyyələrində mövcud ola bilər. Yalnız qeyri-relyativistik dalğa tənliklərinin həlləri sistem haqqında bütün məlumatları vermək imkanı yoxdur. Ona görədə bəzi proseslərdə isə artıq sırf relyativistik dalğa tənliklərinin araşdırılması və həll olunması tələb olunur.

Relyativistik kvant mexanikası, cisimlərin sürətləri işıq sürətinə yaxın olduqda ($v \sim c$) tətbiq olunur. Relyativistik kvant mexanikasının əsas tənlikləri Kleyn-Fok-Qordon tənliyi və Dirak tənliyi hesab olunur.

Kleyn–Fok–Qordon xüsusi nisbilik nəzəriyyəsi ilə kvant mexanikasının prinsiplərini birləşdirərək enerji–impuls əlaqəsinin operator formasından əldə edilir. Nisbilik nəzəriyyəsinin tələblərini ödəyən yəni lorens çevrilmələrinə görə invariant tənlik almaq üçün enerji, impuls və kütlə arasındakı nisbilik nəzəriyyəsindən alınan münasibətdən istifadə edilərək tapılmışdır.

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$$
$$\vec{p} \to \hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$$
$$E \to \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$
$$E = \sqrt{c^2p^2 + m_0^2c^4}$$

Uyğun əvəzləmələri nəzərə alsaq,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sqrt{-c^2\hbar^2\nabla^2 + m_0^2c^4}\,\psi$$

Lakin, operatorun kvadrat kökünün nə demək olduğunu bilavasitə bilmədiyimiz üçün, bu ifadənin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldək. Bu əməliyyat riyazi nöqteyi nəzərdən tam təyin olunmuş tənliyə gətirir.

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t} = -c^2\hbar^2\nabla^2\psi + m_0^2c^4\psi$$
$$\left(c^2\hbar^2\nabla^2 - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - m_0^2c^4\right)\psi = 0$$

Burada, $c - işıq\ sürəti, \hbar - Plank\ sabitidir.$ Bu tənlik sərbəst zərrəcik üçün Kleyn-Fok-Qordon tənliyidir. Spini sıfır olan zərrəciklərin relyativistik dalğa tənliyidir. Bu tənlik kompozit hissəciklər üçün nəzəri təsvir verir. Bu hissəciklərə pionlar, mezonlar, kaonlar, Hiqqs bozonu və s aiddir. Qeyri-relyativistik limitdə Şredinger tənliyinə keçir. Kleyn-Fok-Qordon tənliyi zamana və fəzaya görə ikinci tərtib xüsusi törəməli diferensial tənlikdir. Kvant sahə nəzəriyyəsində bozonların davranışını təsvir edir. Bu tənliyi relyativistik invariant şəkildə yazmaq üçün 4 ölçülü vektor-operator daxil edək:

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (ct, -\vec{r})$$
$$\hat{p}^\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial(ct)} - \vec{\nabla}\right) = (\widehat{p_0}, \hat{\vec{p}})$$

Onda Kleyn–Fok–Qordon tənliyini aşağıdakı formada yaza bilərik:

$$\hat{p}^{\mu}\widehat{p_{\mu}}\psi = m_0^2c^2\psi$$
$$(\hat{p}^{\mu}\widehat{p_{\mu}} - m_0^2c^2)\psi = 0$$

Və ya :

$$\left(D + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$
$$D = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta - \text{ Dalamber operatorudur}$$

Bilavasitə KFQ tənliyinin Lorens invariant olduğunu göstərə bilərik, yəni $\hat{p}^{\mu}\widehat{p_{\mu}}\psi$- lorens invariantıdır. O, biri tənlikdə kütlə həddinin $\frac{m^2c^2}{\hbar^2}$ daxil olmasını nəzərə almaqla klassik dalğa tənliyi kimi baxa bilərik. Bu tənliyin sərbəst həlli aşağıdakı formada olacaqdır:

$$\psi = exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_{\mu}x^{\mu}\right) = exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(p_0x^0 - \vec{p}\,\vec{x}\right)\right] = exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}\,\vec{x} - Et\right)\right]$$

Müəyyən əvəzləmələri nəzərə alsaq,

$$\hat{p}^{\mu}\widehat{p_{\mu}}\psi = m^2c^2\psi \rightarrow p^{\mu}p_{\mu}exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_{\mu}x^{\mu}\right) = m^2c^2exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_{\mu}x^{\mu}\right), p^{\mu}p_{\mu} = m^2c^2$$

ifadəsini alarıq.

Və ya

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}\,\vec{p} = m^2c^2$$

$$E = \pm\sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2}$$

Beləliklə, KFQ tənliyinin iki həlli, $E = +c\,(m^2c^2 + \vec{p}^2)^{1/2}$ müsbət enerjiyə uyğun həll və $E = -\,c\,(m^2c^2 + \vec{p}^2)^{1/2}$ mənfi enerjiyə uyğun həllər mövcuddur. Mənfi enerjiyə uyğun həll antizərrəciyi təsvir edir. 4- ölçülü cərəyan sıxlığının j_{μ} aşkar ifadəsini tapmaq ifadəsindən istifadə edək:

$$(\hat{p}^{\mu}\widehat{p_{\mu}} - m^2c^2)\psi = 0 \qquad (1)$$

Bu ifadədən kompleks qoşma alaq:

$$(\hat{p}^{\mu}\widehat{p_{\mu}} - m^2c^2)\psi^* = 0 \quad (2)$$

(1) ifadəsini soldan ψ^*-a, (2) ifadəsini isə sağdan ψ-ə vurub tərəf-tərəfə çıxsaq, onda:

$$\psi^*(\hat{p}^{\mu}\widehat{p_{\mu}} - m^2c^2)\psi - \psi(\hat{p}^{\mu}\widehat{p_{\mu}} - m^2c^2)\psi^* = 0$$

Və ya

$$-\psi^*\left(\hbar^2\nabla_{\mu}\nabla^{\mu} + m^2c^2\right)\psi + \psi\left(\hbar^2\nabla_{\mu}\nabla^{\mu} + m^2c^2\right)\psi^* = 0$$

Buradan da,

$$\nabla_\mu(\psi^*\nabla^\mu\psi - \psi\nabla^\mu\psi^*) = \nabla_\mu j^\mu = 0$$

4- ölçülü cərəyan sıxlığı j_μ aşağıdakı formada təyin olunur:

$$j_\mu = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla_\mu\psi - \psi\nabla_\mu\psi^*)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)\right] - div\left(-\frac{i\hbar}{2m}\right)[\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*] = 0$$

Bu tənlik bilavasitə kəsilməzlik tənliyidir.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0$$

Xarici potensial sahəsi mövcud olduqda Kleyn–Fok–Qordon tənliyi müvafiq şəkildə modifikasiya edilir. Mərkəzi simmetriyaya malik potensiallar üçün tənlik sferik koordinatlarda dəyişənlərin ayrılması üsulu ilə radial və bucaq hissələrinə bölünür. Bu isə bağlı hallar üçün enerji spektrinin və dalğa funksiyalarının analitik şəkildə tapılmasına imkan verir.

Potensial modellərin seçimi fiziki sistemin real davranışının adekvat təsviri baxımından həlledici əhəmiyyətə malikdir. Sadə harmonik osilyator və ya Kulon tipli potensiallar bir çox fundamental nəticələr versə də, real molekulyar və atomaltı sistemlərin qeyri-xətti təbiətini tam əks etdirmir. Bu səbəbdən molekulyar vibrasiyaların və bağlanmış halların modelləşdirilməsində daha real potensiallara ehtiyac yaranır. Bu kontekstdə Hülten potensialı xüsusi yer tutur. Hülten potensialı üçün Kleyn–Fok–Qordon tənliyinin həllərində spektrin sonlu sayda bağlanmış hallara malik olması, eləcə də relyativistik düzəlişlər səbəbindən qeyri-bərabər səviyyə paylanması müşahidə olunur. Bu isə klassik qeyri-relyativistik modellərlə müqayisədə daha mürəkkəb və zəngin spektral quruluşun formalaşmasına gətirib çıxarır. Mövzunun aktuallığı həm də onun müasir elmi və texnoloji tətbiqləri ilə bağlıdır. Yüksək dəqiqlikli spektroskopiya, molekulyar fizika, nanostrukturların kvant modelləri və effektiv sahə nəzəriyyələri kimi sahələrdə relyativistik təsirlərin nəzərə alınması getdikcə daha böyük əhəmiyyət kəsb edir. Bu kontekstdə Kleyn–Fok–Qordon tənliyinin Morze potensialı üçün analitik həllərinin spektral xüsusiyyətlərinin sistemli şəkildə öyrənilməsi mövcud modellərin təkmilləşdirilməsinə və yeni nəzəri yanaşmaların formalaşdırılmasına şərait yaradır.

Hülten potensialı – qısa məsafəli eksponensial tipli potensialdır. Kvant mexanikasında qısa məsafəli qarşılıqlı təsirləri modelləşdirmək üçün istifadə olunan potensialdır. Bu potensial kiçməsafələrdə Kulon potensialına bənzəyir. Lakin, böyük məsafədə eksponensial şəkildə azalır. Aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$V(r) = -\frac{V_0 e^{-\delta r}}{1-e^{-\delta r}}$$

Burada, V_0- potensialın dərinliyi, δ – ekranlaşma parametri, yəni məsafə artdıqca potensialın necə sönəcəyini göstərir. r isə hissəciklər arasında radial məsafədir.

Bu potensialın əsas xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, $r \to 0$ limitində Kulon potensialına yaxınlaşır, $r \to \infty$ limitində isə eksponensial şəkildə sıfıra gedir. Kulon potensialında sonsuz sayda enerji səviyyəsi var, amma Hülten potensialında yalnız müəyyən sayda bağlı hal mövcuddur. Bu da onu real sistemlərdəki qısa məsafəli qarşılıqlı təsirlər üçün daha realist edir. Məhz bu xüsusiyyətlərinə görə Hülten potensialı atom, molekul və nüvə fizikasında effektiv model potensial kimi geniş istifadə edilir.

Adi kvant mexanikasında Şrödinger tənliyi üçün Hülten potensialının analitik həlli mövcuddur və enerji səviyyələri dəqiq şəkildə tapıla bilir. Lakin relyativistik halda, xüsusilə Klein–Fok–Qordon tənliyi üçün analitik həll daha mürəkkəbdir və xüsusi riyazi metodların tətbiqini tələb edir. Bu baxımdan, belə bir problemin analitik həlli həm riyazi, həm də fiziki cəhətdən mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Hazırkı işin məqsədi Klein–Fok–Qordon tənliyinin Hülten potensialı sahəsində radial hissəsinin analitik həllini əldə etmək, enerji spektrini çıxarmaq və dalğa funksiyalarının açıq formasını müəyyən etməkdir. Bundan əlavə, qeyri-relyativistik həddin araşdırılması yolu ilə alınmış nəticələrin Şredinger tənliyi ilə uyğunluğu göstəriləcəkdir. Bu yanaşma relyativistik kvant sistemlərinin qısa məsafəli potensiallar altında davranışını daha dərindən anlamağa imkan verir və molekulyar fizika sahəsində tətbiqi baxımından aktualdır.

Beləliklə, bu mövzunun araşdırılması relyativistik kvant mexanikasının əsas problemlərindən birinə – real potensiallar üçün dəqiq və analitik həllərin əldə edilməsinə – yönəlmişdir. Giriş hissəsində vurğulanan nəzəri və tətbiqi aspektlər göstərir ki, Kleyn–Fok–Qordon tənliyinin Morze potensialı kontekstində spektral xüsusiyyətlərinin təhlili müasir fizikanın aktual problemləri sırasında yer alır və gələcək tədqiqatlar üçün möhkəm elmi baza yaradır.

Təhlil:

Relyativistik skalyar hissəciyin xarici potensial sahəsində davranışı Kleyn–Fok–Qordon tənliyi ilə təsvir olunur. Birölçülü halda bu tənlik aşağıdakı formaya malikdir: [1, s. 88].

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{\hbar^2c^2}\left((E-V(x))^2-m^2c^4\right)\right]\psi(x)=0 \qquad (1)$$

Kleyn-Fok- Qordon tənliyini Hülten potensiallı sahədə həll etmək üçün Hülten potensialını iki toplanana ayırırıq [2,3]. Vektor təbiətli Hülten potensialı və skalyar təbiətli Hülten potensialı [4]. Bu potensiallar aşağıdakı formada təyin olunurlar [5,6]:

$$V(r)=-\frac{V_0e^{-\delta r}}{1-e^{-\delta r}} \qquad (2)$$

$$S(r)=-\frac{S_0e^{-\delta r}}{1-e^{-\delta r}}$$

(3) Sferik koordinatlarda skalyar $S(r)$ və vektor $V(r)$ potensialları üçün Kleyn-Fok-Qordon tənliyi aşağıdakı formadadır:

$$\left[-\nabla^2+\left(M+S(r,\theta)\right)^2\right]\psi(r,\theta,\varphi)=[E-V(r,\theta)]^2\psi(r,\theta,\varphi) \quad (4)$$

Burada, E- nuklon enerjisinin relyativistik enerjisi, M- nuklon sisteminin kütləsi, $\theta -$ polyar bucaq, φ- azimutal bucaq, $\hbar$- Plank sabitidir.

$\nabla_r^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$ və bucaq $\frac{\nabla_{\theta,\varphi}^2}{r^2}=-\frac{\hat{L}^2}{\hbar^2r^2}$ hissələrinə ayrılır, yəni

$$\vec{\nabla}^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\hat{L}^2}{\hbar^2r^2} \qquad (5)$$

Laplas Δ operatoru radial olduğundan, (4) tənliyinin həlli sferik koordinat sistemində stasionar halda

$$\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{\chi(r)}{r}\Theta(\theta)e^{im\varphi};\ m=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots \qquad (6)$$

şəklində axtarıla bilər [126]. (6) ifadəsini (4) Kleyn-Fok-Qordon tənliyində nəzərə alsaq onda radial Kleyn-Fok-Qordon tənliyini aşağıdakı formada yazarıq:

$$\chi''(r)\left[(E^2-M^2)-2\big(MS(r)+EV(r)\big)+\big(V^2(r)-S^2(r)\big)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi(r)=0 \qquad (7)$$

Məqsədimiz (7) tənliyini hiperhəndəsi tənlik formasına gətirməkdir [7]:

$$\chi''(r)+\left[(E^2-M^2)-2\left(\frac{(MS_0+EV_0)e^{-\delta r}}{1-e^{-\delta r}}\right)+\left(\frac{(V_0^2-S_0^2)e^{-2\delta r}}{(1-e^{-\delta r})^2}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi(r)=0 \qquad (8)$$

Bu məqsədlə bəzi əvəzləmələr daxil edilir:

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{M^2-E^2}}{\delta},\ \alpha=\frac{\sqrt{2EV_0+2MS_0}}{\delta},\ \beta=\frac{\sqrt{S_0^2-V_0^2}}{\delta},\ s=e^{-\delta r} \qquad (9)$$

$$\frac{d}{dr}=\frac{ds}{dr}\frac{d}{ds}=-\delta e^{-\delta r}\frac{d}{ds}=-\delta s\frac{d}{ds} \qquad (10)$$

$$\frac{d^2}{dr^2}=\left(\frac{ds}{dr}\frac{d}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dr}\frac{d}{ds}\right)=-\delta s\frac{d}{ds}\left(-\delta s\frac{d}{ds}\right)=\delta^2 s\frac{d}{ds}+\delta^2 s^2\frac{d^2}{ds^2} \qquad (11)$$

(11) ifadəsini (9) tənliyində nəzərə alsaq, onda alarıq:

$$\delta^2 s^2\,\chi''(s)+\delta^2 s\,\chi'(s)+\left[-\varepsilon^2\delta^2+\frac{\alpha^2\delta^2 s}{1-s}-\frac{\beta^2\delta^2 s}{(1-s)^2}-l(l+1)\delta^2\left[C_0+\frac{e^{-\delta r}}{(1-e^{-\delta r})^2}\right]\right]\chi(s)=0$$

Və ya

$$\chi''(s)+\frac{\chi'(s)}{s}+\left[-\frac{\varepsilon^2}{s^2}+\frac{\alpha^2}{s(1-s)}-\frac{\beta^2}{s(1-s)^2}-\frac{l(l+1)}{s^2}\left[C_0+\frac{s}{(1-s)^2}\right]\right]\chi(s)=0$$

$$\chi''(s)+\chi'(s)\frac{1-s}{s(1-s)}+\frac{1}{s^2(1-s)^2}\times$$
$$\times\left[-\varepsilon^2(1-s)^2+\alpha^2 s(1-s)-\beta^2 s^2-l(l+1)C_0(1-s)^2-l(l+1)s\right]\chi(s)=0 \quad (12)$$

(12) tənliyi ilə hiperhəndəsi tip tənliyin müqayisəsindən

Vektor potensialının skalyar potensialından fərqli olduğu ümumi hall üçün enerji spektrini aşağıdakı formada yazmaq olar:

$$(M^2-E^2)=\left[\frac{\alpha^2-\lambda-\frac{1}{2}-n(n+1)-(2n+1)\sqrt{\frac{1}{4}+\beta^2+\lambda}}{2n+1+2\sqrt{\frac{1}{4}+\beta^2+\lambda}}\delta\right]^2-l(l+1)\delta C_0 \quad (13)$$

Əgər $V_0-vektor\ potensial\ S_0-\ skalyar\ potensiala$ bərabər olarsa, $V_0=S_0$, onda $\beta=0$ olur, yəni:

$$(M^2-E^2)=\left[\frac{\alpha^2-\lambda-\frac{1}{2}-n(n+1)-(2n+1)\sqrt{\frac{1}{4}+\beta^2+\lambda}}{2n+1+2\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)}}\delta\right]^2-l(l+1)\delta C_0=$$

$$\left[\frac{\alpha^2-\lambda-\frac{1}{2}-n(n+1)-(2n+1)\left(l+\frac{1}{2}\right)}{2n+1+2\left(l+\frac{1}{2}\right)}\delta\right]^2-l(l+1)\delta C_0 \qquad (14)$$

Əgər $V(r)=-S(r)$ olarsa onda enerji spektri aşağıdakı formada təyin edilir:

$$(M^2-E^2)=\left[\frac{\alpha'^2-\lambda-\frac{1}{2}-n(n+1)-(2n+1)\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}}{2n+1+2\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)}}\delta\right]^2-l(l+1)\delta C_0=$$

$$=\left[\frac{\alpha'^2}{2(n+1+l)}-\frac{(n+1+l)^2}{2}\right]^2\cdot\delta^2-l(l+1)\delta^2 C_0 \qquad (15)$$

Burada, $\beta=0$, amma $\alpha'^2\neq\alpha^2$ və aşağıdakı formada təyin olunur:

$$\alpha'=\frac{\sqrt{2V_0(E-M)}}{\delta} \qquad (16)$$

Sferik simmetriyaya görə yazsaq:

$$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\hat{L}^2Y_{lm}=l(l+1)Y_{lm}$$

Radial tənlik:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[(E-V)^2-m^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0$$

Əvəzetmə etsək:

$$R(r)=\frac{u(r)}{r}$$

Nəticədə,

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\left[(E-V(r))^2-m^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u=0$$

u(r)−reduksiya olunmuş radial dalğa funksiyası
Tam dalğa funksiyası:

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r}u_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Hülten potensialı ilə enerji spektri:
Radial Kleyn-Fok-Qordon tənliyi aşağıdakı formada hiperqometrik tənliyə çevrilir:

$$\frac{d^2R(s)}{ds^2}+\frac{1-s}{s(1-s)}\frac{dR(s)}{ds}+\frac{1}{\delta^2s^2(1-s)^2}\left[\left(E+V_0\frac{s}{1-s}\right)^2-m^2c^4-\hbar^2c^2\frac{l(l+1)\delta^2}{r^2}\right]R(s)=0$$

Burada dəyişən s=$e^{-\delta r}$ götürülmüşdür. Kvantlaşma şərti nəticəsində enerji səviyyələri belə tapılır:

$$E_{nl}=\frac{V_0}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{V_0^2}+4\hbar^2c^2\delta^2\left[\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{l(l+1)\hbar^2c^2\delta^2}{(E_{nl}+mc^2)^2}}\right)^2\right]$$

n−baş kvant ədədi
l- orbital kvant ədədi
Bu enerji ifadəsi tam analitikdir.

Nəticə

Aparılmış tədqiqat Hülten potensiallı sahədə Kleyn-Fok-Qordon tənliyinin analitik həllinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Tam analiz üçün V(r) vector potensialın S(r) skalyar potensiala bərabər olduğu V(r)= S(r) halda tam öyrənilmişdir. Bu halda Kleyn-Fok-Qordon tənliyi $2 \cdot V(r)$ potensialı üçün Şredinger tənliyinə çevrilir və bu da [105] işindəki nəticə ilə eynilik təşkil edir. Bu bölmədə Hülten potensialı üçün modifiə olunmuş Kleyn-Fok-Qordon tənliyi adi kvant mexanikasında Nikivorov-Uvarov metodunu tətbiq etməklə analitik formada həll edilmişdir. Orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətləri üçün zərrəciyin enerji spektrini təsvir edən analitik ifadə alınmışdır. Göstərilmişdir ki, enerji spektri orbital və radial kvant ədədlərindən ciddi asılıdır. Hülten potensiallı sahə üçün Kleyn-Fok-Qordon tənliyini kvant mexanikasında orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətlərində, Hülten potensialı skalyar və vektor potensiallardan təşkil olunduğu halda və onların müxtəlif kombinasiyaları üçün analitik həll edərək enerjinin məxsusi qiymətinin və məxsusi funksiyasının analitik ifadələri tapılmış və relyativistik həllərdən qeyri- relyativistik həllərin alınması göstərilmişdir

ƏDƏBİYYAT SİYAHISI:

1. Garcia M.G., de Castro A.S., Castro L.B., Alberto P. New solutions of the D-dimensional Klein-Gordon equation via mapping onto the nonrelativistic one-dimensional Morse potential. Annals of Physics, 2017;378:88–99.
2. Hecht K.T., Adler A. Generalized seniority for favored J≠0 pairs in mixed configurations. Nuclear Physics A, 1969;137:129–143.
3. Hitler L., Iserom I.B., Tchoua P., Ettah A.A. Bound State Solutions of the Klein-Gordon Equation for the More General Exponential Screened Coulomb Potential Plus Yukawa (MGESCY) Potential Using Nikiforov-Uvarov Method. Journal of Physical Mathematics, 2018;9,:261.
4. Alhaidari A.D. Solution of the relativistic Dirac–Hulthén problem. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2004;37:5805.
5. Çapak M., Gonul B., Remarks on the Woods–Saxon potential. Modern Physycs Letters A, 2016;31:1650134.
6. Çapak M., Petrellis D., Gonul B. Analytical solutions for the Bohr Hamiltonian with the Woods–Saxon potential. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2015;42:95102.
7. Ahmadov A.I., Nagiyev Sh.M., Qocayeva M.V, Uzun K., Tarverdiyeva V.A. Exact analytical solution of Klein-Fock-Gordon equation with the Hulthen plus a Ring-Shaped like potentials for nonzero angular momentum. The 6th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Baku, 2018, 11-13 July, 3 p.

Aghaali Ali AHMADOV
Master's student at Sumgayit State University

ANALYTICAL SOLUTION OF THE KLEIN-FOCK-GORDON EQUATION FOR A FIELD WITH HÜLTEN POTENTIAL IN ORDINARY RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS

Summary

In this article, the analytical solution of the Klein-Fock-Gordon equation in the Hülten potential domain is investigated within the framework of ordinary quantum mechanics. The Klein-Fock-Gordon equation, which describes the dynamics of relativistic scalar particles, is of particular interest in the case of interactions with short-range potentials of the central type. The Hülten potential, on the other hand, has an exponentially decreasing form and is widely used in modeling atomic, molecular, and nuclear systems due to its approximation to the short-range Coulomb potential and its rapid decay at large distances. In this work, the radial Klein-Fock-Gordon equation is separated in spherical coordinates and the differential equation for the Hülten potential is reduced to a hypergeometric type equation. By applying the appropriate boundary conditions, the quantization condition for the energy spectrum is obtained and the analytical expression of the energy levels for the bound states is derived. The normalized form of the wave functions is expressed by means of special functions. Analysis of the obtained results shows that the analytical solution of the Klein-Fock-Gordon equation in the Hülten potential leads to a clear manifestation of relativistic effects in the energy spectrum of the system and the structure of the wave functions. The energy spectrum depends not only on the parameters and quantum numbers of the potential, but also on relativistic factors introduced through the speed of light c. A comparison of the wave functions shows that the radial solutions obtained by the Klein-Fock-Gordon equation differ somewhat from those obtained by the Schrödinger equation. The shape and maximum of the radial wave function, which characterizes the probability of a particle being at a certain distance from the center, may change slightly compared to the non-relativistic case. These changes are especially noticeable in regions where the potential is deep and the interaction is stronger. Thus, the analytical solution of the Klein-Fock-Gordon equation in the Hülten potential field both clarifies the nature of relativistic effects and demonstrates agreement with the results of non-relativistic quantum mechanics in terms of theoretical consistency and accuracy of the limit transition. This indicates that the model is a suitable theoretical framework for a more fundamental and accurate description of short-range interactions in molecular systems.

Keywords: Klein-Fock-Gordon equation, Hülten potential, analytical solutions, energy spectrum, relativistic quantum mechanics.

Агаали Али АХМЕДОВ
Магистр, Сумгаитский Государственный Университет

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ФОКА-ГОРДОНА ДЛЯ ПОЛЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ ХЮЛЬТЕНА В ОБЫЧНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Резюме

В данной статье в рамках обычной квантовой механики исследуется аналитическое решение уравнения Клейна-Фока-Гордона в области потенциала Хюльтена. Уравнение Клейна-Фока-Гордона, описывающее динамику релятивистских скалярных частиц, представляет особый интерес в случае взаимодействий с короткодействующими потенциалами центрального типа. Потенциал Хюльтена, с другой стороны, имеет экспоненциально убывающую форму и широко используется при моделировании атомных, молекулярных и ядерных систем благодаря своему приближению к короткодействующему кулоновскому потенциалу и быстрому затуханию на больших расстояниях. В данной работе радиальное уравнение Клейна-Фока-Гордона разделяется на сферические координаты, а дифференциальное уравнение для потенциала Хюльтена сводится к уравнению гипергеометрического типа. Применяя соответствующие граничные условия, получаем

условие квантования энергетического спектра и выводится аналитическое выражение для уровней энергии связанных состояний. Нормализованная форма волновых функций выражается с помощью специальных функций. Анализ полученных результатов показывает, что аналитическое решение уравнения Клейна-Фока-Гордона в потенциале Хюльтена приводит к явному проявлению релятивистских эффектов в энергетическом спектре системы и структуре волновых функций. Энергетический спектр зависит не только от параметров и квантовых чисел потенциала, но и от релятивистских факторов, вводимых скоростью света с. Сравнение волновых функций показывает, что радиальные решения, полученные с помощью уравнения Клейна-Фока-Гордона, несколько отличаются от решений, полученных с помощью уравнения Шрёдингера. Форма и максимум радиальной волновой функции, характеризующей вероятность нахождения частицы на определённом расстоянии от центра, могут незначительно изменяться по сравнению с нерелятивистским случаем. Эти изменения особенно заметны в областях, где потенциал глубокий и взаимодействие сильнее. Таким образом, аналитическое решение уравнения Клейна-Фока-Гордона в потенциальном поле Хюльтена проясняет природу релятивистских эффектов и демонстрирует согласие с результатами нерелятивистской квантовой механики с точки зрения теоретической согласованности и точности предельного перехода. Это указывает на то, что модель является подходящей теоретической основой для более фундаментального и точного описания короткодействующих взаимодействий в молекулярных системах.

Ключевые слова: уравнение Клейна-Фока-Гордона, потенциал Хюльтена, аналитические решения, энергетический спектр, релятивистская квантовая механика.

Daxil olub: 26.02.2026